

سیستم های اسپینی - بخش اول

معرفی مدل آیزینگ و حل دقیق مدل یک بعدی آیزینگ

وحیدکریمی پور - دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

۲۷ آذر ۱۴۰۴

۱ مقدمه

سیستم های اسپینی یکی از مهم ترین و در عین حال ساده ترین دستگاه های بس ذره ای با برهم کنش هستند. خواص مغناطیسی یک جامد بیشتر ناشی از برهم کنش گشتاور مغناطیسی اتم ها با یکدیگر است. اتم ها معمولاً در جای خود ساکن هستند و حرکت نمی کنند. بنابراین درجات آزادی چنین دستگاهی دیگر مکان و سرعت اتم ها نیست بلکه جهت گشتاور مغناطیسی اتم هاست. میدان مغناطیسی خارجی و هم چنین برهم کنش اتم های جامد بیشتر سعی در منظم کردن این گشتاورها دارند. از طرف دیگر گرمای موجود در محیط سعی در بی نظم کردن این گشتاورها دارد. مقابله این دو عامل متضاد خواص مغناطیسی این جامد را معین خواهد کرد. به این ترتیب و با صرف نظر کردن از درجات آزادی مکان و سرعت مطالعه چنین دستگاهی تا حد زیادی ساده می شود. هامیلتونی چنین دستگاهی معمولاً به شکل زیر است:

$$H = - \sum_{i,j} J_{ij} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j - \sum_i \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{S}_i. \quad (1)$$

در این رابطه $\mathbf{S}_i$ برداری سه بعدی است با اندازه S که می توان آن را بدون دیمانسیون در نظر گرفت، زیرا همه ضرایب دارای دیمانسیون را می توان در ضرایب جفت شدگی J_{ij} و میدان مغناطیسی موضعی $\mathbf{B}_i$ جذب کرد. از این به بعد بردارهای $\mathbf{S}_i$ را با تسامح اسپین می نامیم، اگر چه در این درس این دستگاه را به صورت کلاسیک در نظر می گیریم. میکروحالت های چنین سیستمی عبارتند از همه وضعیت هایی که اسپین ها می

توانند به خود بگیرند، یعنی همه وضعیت هایی مثل $(S_1, S_2, \dots, S_N)$. تابع پارش چنین دستگاهی به صورت زیر خواهد بود:

$$Z_N = \int dS_1 dS_2 \dots dS_N e^{-\beta H}. \quad (2)$$

اما می توان نخست یک مدل بسیار ساده را بررسی کرد. این مدل ساده مدل آیزینگ^۱ نام دارد. در این مدل چندین فرض ساده کننده به صورت زیر در نظر گرفته می شود، اما نکته مهم این است که این فرض ها ضمن آنکه مطالعه مکانیک آماری این مدل را ساده می کنند، از کیفیت های اصلی و اساسی این مدل برای توضیح فیزیکی پدیده های مغناطیسی نمی کاهند. طبیعتاً می توان بسته به پدیده مورد مطالعه، هر کدام از این فرض های ساده کننده را نادیده گرفت و مدلی پیچیده تر را بررسی کرد. این فرض ها این ها هستند:

یک - فرض می کنیم که فقط اسپین های همسایه با هم برهم کنش می کنند و ضریب جفتدگی آنها نیز برابر با J است. میدان مغناطیسی یکنواخت است و اندازه آن برابر با B است.

دو - فرض می کنیم که اسپین ها فقط یک مولفه مثلاً در راستای z دارند و افت و خیز گرمایی تنها باعث می شود که جهت آن در راستای مثبت یا منفی قرار بگیرد. این فرض در بعضی از مواد مغناطیسی که به دلیل ساختار شبکه ای شان یک ناهمسانگردی شدید در یکی از راستاها وجود دارد، فرض واقع بینانه ای است.

با این فرض های ساده کننده به مدل آیزینگ که ساده ترین مدل بس ذره ای است که در آن برهم کنش وجود دارد، خواهیم پرداخت. می توان گفت که مدلی ساده تر از آن نمی توان تعریف کرد. از این روست که مدل آیزینگ یکی از مهم ترین مدل های مکانیک آماری است. اهمیت این مدل تنها به خاطر این نیست که مدل ساده ای برای مطالعه نظم خود بخودی مغناطیسی در جامدات فرومغناطیسی یا پادفرومغناطیسی است، بلکه در این است که تعداد بسیار زیادی از پدیده های دیگر را چه در فیزیک و چه در دیگر شاخه های علوم می توان به این مدل یا تغییراتی از این مدل نگاشت. هم چنین مدل آیزینگ خاستگاه بسیاری دیگر از مدل های دقیقاً حل پذیر در مکانیک آماری شده است. بسیاری از روش های حل دقیق مدل های بس ذره ای که امروزه می شناسیم نخستین بار در مطالعه مدل آیزینگ معرفی شده اند. این مدل را تعریف می کنیم. فرض می کنیم در یک شبکه دلخواه مثلاً شبکه یک بعدی یا دو بعدی یا چند بعدی، در هر نقطه مثل i یک متغیر دوتایی S_i که تنها دو مقدار $+1$ و -1 اختیار می کند قرار گرفته است. برای راحتی می توانیم این متغیر دوتایی را اسپین بنامیم. این نام را هم برای سادگی به کار می بریم و هم برای اینکه خاستگاه

¹ Ising Model

اولیه مدل آیزینگ مطالعه نظم مغناطیسی در یک ماده مغناطیسی بوده است. هامیلتونی این سیستم به صورت زیر تعریف می شود:

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j - B \sum_i S_i, \quad (3)$$

که در آن جمع روی اسپین های همسایه صورت می گیرد. در این هامیلتونی B را میدان مغناطیسی می نامیم. ضریب J نیز نشان دهنده برهم کنش بین اسپین هاست. ^۲ مقدار میدان مغناطیسی را مثبت می گیریم. در این صورت میدان سعی می کند که اسپین ها را با خود هم جهت کند چرا که این کار باعث کاهش انرژی می شود. هرگاه J مثبت باشد اسپین های نزدیک نیز سعی می کنند هم جهت شوند. چنین مدلی را مدل فرومغناطیس می نامیم. اما اگر J منفی باشد اسپین های نزدیک سعی می کنند برای پایین آوردن انرژی جهت مخالف هم را اختیار کنند. چنین مدلی را مدل پادفرومغناطیس می نامیم. تابع پارش مدل آیزینگ به صورت زیر تعریف می شود:

$$Z(N, J, B) = \sum_{\{S_i\}} e^{-\beta H} = \sum_{\{S_i\}} e^{\beta J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j + \beta B \sum_i S_i} \quad (4)$$

پارامتر نظم ^۳ یعنی آن چیزی که وجود نظم یا بی نظمی را در مدل فرومغناطیسی نشان می دهد چیزی نیست جز متوسط مغناطش یعنی

$$m := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle S_i \rangle. \quad (5)$$

هدف اصلی ما این است که مقدار این پارامتر نظم را پیدا کنیم که طبیعتاً معادله بدست آمده معادله حالت این سیستم خواهد بود. بخصوص علاقمندیم ببینیم مغناطش خود بخود یعنی وقتی که میدان مغناطیسی به عنوان عامل نظم دهنده خارجی وجود ندارد، پدیدار می شود یا نه؟ در این درس مدل آیزینگ یک بعدی را تحت شرایط گوناگون و به روش های متفاوت حل می کنیم. حل مدل آیزینگ در دو بعد را به درس های آینده موکول می کنیم. اما قبل از ادامه به چند نمونه از پدیده هایی دیگری که همگی به مدل آیزینگ نگاشته می شوند را نام می بریم:

لایه نشانی روی سطح یا گاز شبکه ای: ^۴ می توان از چنین مدلی برای توصیف لایه نشانی اتم ها روی یک سطح استفاده کرد. هر جایگاه دو حالت دارد: یا خالی است و یا یک اتم روی آن نشسته است و در یک جایگاه نیز بیش از یک اتم نمی تواند قرار بگیرد. اگر J منفی باشد به این معناست که وقتی یک جایگاه پر شد اتم ها تمایل کمتری دارند که اطراف آن جایگاه بنشینند.

^۲ از آنجا که بسیاری از پدیده های دیگر حتی در مطالعات مربوط به فیزیک اجتماع به مدل آیزینگ نگاشته می شوند، B می تواند نشان دهنده هر نوع عامل خارجی باشد که سعی می کند مقادیر متغیرها را با خود هم جهت کند.

^۳ Order Parameter

^۴ Lattice Gas

آلیاز دو گانه:^۵ یا می توان آن را برای توصیف یک آلیاز دو گانه به کار برد که هر جایگاه یا توسط یک اتم از نوع A یا B پر شده است. با توجه به علامت J ، می توان مدل هایی را توصیف کرد که در آن ها اتم های یکسان یا اتم های نایکسان در کنار هم قرار می گیرند.

گسترش اپیدمی:^۶ هم چنین می توان آن را مدلی برای گسترش یک اپیدمی در نظر گرفت (که در آن هر شخص در دو حالت بیمار یا سالم قرار دارد).^۷

مدل های تشکیل آراء در اجتماع:^۸ این مدل ها هم چنین برای مطالعه نحوه تشکیل آراء و عقاید در یک جامعه کاربرد دارند که در آن ها نسبت به یک موضوع خاص می تواند دو رای متفاوت داشته باشد.

شمار این گونه پدیده ها که همگی با مدل آیزینگ مطالعه می شوند بسیار زیاد است و همین موضوع است که بر اهمیت این مدل می افزاید. در بخش های بعدی سعی می کنیم که مدل آیزینگ را تحت شرایط گوناگون و به روش های گوناگون حل کنیم. منظور از حل مدل آیزینگ هم این است که تابع پارش آن را به طور دقیق حساب کنیم. این کار ما را مجهز به رشته ای از تکنیک ها می کند که در مطالعه مکانیک آماری همواره با ما خواهند بود و به همین جهت می بایست آنها را خوب فرا بگیریم.

۲ مدل آیزینگ در یک بعد بدون میدان مغناطیسی

یک شبکه یک بعدی در نظر می گیریم، شکل (۱). هامیلتونی مدل آیزینگ برابر است با:

$$H = -J \sum_{i=1}^{N-1} S_i S_{i+1}, \quad (۶)$$

و تابع پارش برابر است با

Binary Alloy^۵

Epidemic Distribution^۶

^۷البته مدل های اپیدمی کامل سه حالت دارند و شامل فرد بیمار شفا یافته که قابلیت سرایت دادن بیماری را دارد نیز می شوند.

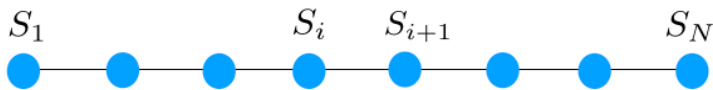
Voting Systems^۸

$$Z = \sum_{\{S_i\}} e^{\beta J \sum_{i=1}^{N-1} S_i S_{i+1}}. \quad (7)$$

می توان این مدل را با شرایط مرزی گوناگون در نظر گرفت. مثلاً می توانیم فرض کنیم که اسپین های دو انتها کاملاً آزاد هستند یا اینکه در مقدارهای از پیش معینی قرار گرفته اند یا اینکه شرایط مرزی تناوبی است. خواهیم دید که در حد ترمودینامیک همه این مدل ها رفتار یکسان دارند. نخست شرایط مرزی باز را مطالعه می کنیم. اسپین های دو طرف آزاد هستند و می توانند هر مقداری را اختیار کنند.

۱.۲ شرایط مرزی باز

مدل آیزینگ را می توان به روش های متفاوت حل کرد. شما هم می توانید روش ابداعی خود را به کار بگیرید. توصیه می کنم که این کار را حتماً انجام دهید چون خیلی آموزنده است. در این جا چند روش ساده را بررسی می کنیم.



شکل ۱: مدل آیزینگ یک بعدی. در شرایط مرزی پریودیک قرار می دهیم: $S_{N+1} = S_1$.

■ راه حل اول: تغییر متغیر

برای حل می توانیم تغییر متغیر زیر را اعمال کنیم:

$$q_1 = S_1 S_2, \quad q_2 = S_2 S_3, \quad \dots, \quad q_{N-1} = S_{N-1} S_N, \quad (۸)$$

این تغییر متغیر از $(S_1, S_2, \dots, S_N)$ به $(q_1, q_2, \dots, q_{N-1})$ دو به یک است، زیرا اگر همه S_i ها را در یک علامت منفی ضرب کنیم هیچ تغییری در q_i ها حاصل نخواهد شد. بنابراین خواهیم داشت:

$$Z = 2 \sum_{q_1, q_2, \dots, q_{N-1}} e^{\beta J (q_1 + q_2 + \dots + q_{N-1})} = 2 (2 \cosh \beta J)^{N-1}, \quad (۹)$$

■ راه حل دوم: روش تکرار

حال از یک روش دیگر موسوم به روش تکرار استفاده می کنیم. تابع پارش را برای N تا اسپین در نظر می گیریم:

$$Z_N = \sum_{\{S_1, S_2, \dots, S_N\}} e^{\beta J (S_1 S_2 + S_2 S_3 + \dots + S_{N-1} S_N)}, \quad (۱۰)$$

اگر روی آخرین اسپین جمع را انجام دهیم بدست می آوریم:

$$Z_N = \sum_{\{S_1, S_2, \dots, S_{N-1}\}} e^{\beta J (S_1 S_2 + S_2 S_3 + \dots + S_{N-2} S_{N-1})} \sum_{S_N} e^{\beta J S_{N-1} S_N}, \quad (۱۱)$$

اما جمع روی آخرین اسپین ساده است:

$$\sum_{S_N} e^{\beta J S_{N-1} S_N} = 2 \cosh(\beta J S_{N-1}), \quad (۱۲)$$

حال نکته مهم این است که این عبارت بستگی به مقدار S_{N-1} ندارد و همواره برابر است با $2 \cosh \beta J$. بنابراین خواهیم داشت:

$$Z_N = Z_{N-1} (2 \cosh \beta J) \quad (۱۳)$$

با تکرار این رابطه تابع پارش را بدست می آوریم که مقدارش برابر خواهد بود با $2(2 \cosh \beta J)^{N-1}$.

۲.۲ شرایط مرزی پریودیک

در این حالت شرط مرزی به این صورت است که $S_{N+1} = S_1$ و هامیلتونی برابر است با

$$H = -J \sum_{i=1}^N S_i S_{i+1}. \quad (۱۴)$$

■ راه حل اول: تغییر متغیر

می خواهیم همان راه حل تغییر متغیر را این بار نیز به کار ببریم. تفاوت اش در این است که این بار جمله $S_N S_1$ در هامیلتونی وجود دارد و با اعمال همان تغییر متغیر تابع پارش برابر می شود با:

$$Z = 2 \sum_{q_1, q_2, \dots, q_{N-1}} e^{\beta J(q_1 + q_2 + \dots + q_{N-1})} e^{\beta J(q_1 q_2 \dots q_{N-1})}, \quad (۱۵)$$

حال می توانیم جمله آخر یعنی عبارت نمایی را بسط دهیم و بدست آوریم

$$Z = 2 \sum_{q_1, q_2, \dots, q_{N-1}} e^{\beta J(q_1 + q_2 + \dots + q_{N-1})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta J)^n}{n!} (q_1 q_2 \dots q_{N-1})^n, \quad (۱۶)$$

به این ترتیب جمع $\sum_{q_1, q_2, \dots, q_{N-1}}$ تبدیل می شود به $N-1$ تا جمع مجزا از هم و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} Z &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta J)^n}{n!} \left[\sum_{q=1, -1} q^n e^{\beta J q} \right]^{N-1} \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta J)^n}{n!} [e^{\beta J} + (-1)^n e^{-\beta J}]^{N-1}. \end{aligned} \quad (۱۷)$$

حال جمع روی n های زوج و فرد را جدا می کنیم و بدست می آوریم:

$$Z = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta J)^{2n}}{(2n)!} (2 \cosh \beta J)^{N-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta J)^{2n+1}}{(2n+1)!} (2 \sinh \beta J)^{N-1} = (2 \cosh \beta J)^N + (2 \sinh \beta J)^N \quad (۱۸)$$

مقایسه تابع پارش نهایی در شرایط مرزی باز و بسته بخوبی نشان می دهد که در حد ترمودینامیک یعنی $N \rightarrow \infty$ نتایج ترمودینامیکی یکسان

خواهند بود.

■ راه حل دوم: بسط دمای بالا

بسط دمای بالا یک روش اختلالی است که در دماهای بالا یعنی وقتی که $J \gg kT$ باشد و سیستم تقریباً بی نظم باشد، مفید است. در واقع پارامتر بسط بستگی مستقیم به مقدار $\frac{J}{kT}$ دارد و بنابراین هر چه که دما بالاتر باشد می توان با جملات کمتری در بسط اختلالی تابع پارش مدل آیزینگ را با دقت خوب بدست آورد. تابع پارش عبارت است از

$$Z = \sum_S e^{\beta J \sum_{i=1}^N s_i s_{i+1}} = \sum_{s_1, s_2, \dots, s_N} \prod_{i=1}^N e^{\beta J s_i s_{i+1}}. \quad (19)$$

براحتی می توان نشان داد که رابطه زیر همیشه برقرار است که در آن $\tau = \tanh \beta J$:

$$e^{K s_i s_{i+1}} = \cosh K + s_i s_{i+1} \sinh K = \cosh K (1 + s_i s_{i+1} \tanh K) = \cosh K (1 + s_i s_{i+1} \tau) \quad (20)$$

صحت این رابطی متکی به این است که $s_i s_j$ همواره یا یک است و یا منهای یک. در نتیجه می توان تابع پارش را به شکل زیر بازنویسی کرد

$$Z_N(\beta J) = \sum_S \prod_{i=1}^N \cosh \beta J (1 + s_i s_{i+1} \tau) = (\cosh \beta J)^N \sum_S \prod_{i=1}^N (1 + s_i s_{i+1} \tau). \quad (21)$$

می توان این عبارت را برحسب قوای متوالی τ بسط داد. جملات اول بسط به ترتیب زیر خواهند بود:

$$\begin{aligned} Z &= (\cosh K)^N \sum_S \prod_{i=1}^N (1 + s_i s_{i+1} \tau) \\ &= (\cosh K)^N \sum_S \left(1 + \tau \left(\sum_i s_i s_{i+1} \right) + \tau^2 \left(\sum_{i,j} s_i s_{i+1} s_j s_{j+1} \right) + \tau^3 \left(\sum_{i,j,k} s_i s_{i+1} s_j s_{j+1} s_k s_{k+1} \right) + \dots \right) \end{aligned} \quad (22)$$

از آنجا که در دمای های بالا τ کوچک است و می توانیم این عبارت را برحسب قوای τ بسط دهیم این بسط، بسط دمای بالا نامیده می شود. حال توجه می کنیم که روابط زیر همیشه برقرارند که در آن ها $\sum_S$ به معنای جمع روی وضعیت همه اسپین های شبکه است.

$$\sum_s 1 = 2 \quad \sum_s s = 0 \quad (23)$$

و

$$\sum_S 1 = 2^N \quad \sum_S s_i = 0 \quad (24)$$

در نتیجه در جمع های بالا عبارت هایی مثل عبارت زیر که در آن ها حتی یکی از s ها به صورت منفرد ظاهر شده باشد برابر با صفر خواهند بود:

$$\sum_S s_i s_j \cdots s_k = 0 \quad (25)$$

تنها عبارت هایی مخالف صفر خواهند بود که در آن هر کدام از s ها به صورت جفت ظاهر شده باشد. این حرف به این معناست که در رابطه (۲۲) تنها دو جمله باقی خواهند ماند. یکی متناسب با τ^0 و دیگری متناسب با τ^N . در نتیجه تابع پارش برابر می شود با:

$$Z_N(\beta) = (2 \cosh \beta J)^N + (2 \sinh \beta J)^N. \quad (26)$$

■ اگر به هر جمله ی $s_i s_{i+1}$ یک پاره خط نسبت دهیم، آنگاه جملات متوالی بسط دمای بالا را می توان به صورت هندسی تعبیر کرد. جمله متناسب با τ مجموع همه پاره خط های گوناگون به طول یک است. جمله متناسب با τ^2 مجموع همه پاره خط های به طول ۲ است که البته ممکن است این پاره خط ها یک پارچه مثل $(s_i s_{i+1})(s_{i+1} s_{i+2}) = s_i s_{i+2}$ یا دو پارچه مثل $(s_i s_{i+1})(s_j s_{j+1})$ ، $j > i + 1$ باشند. در هر صورت جمع روی سر آزاد یک پاره خط به دلیل رابطه $\sum_i s_i = 0$ همواره صفر می شود. تنها وقتی جمع غیر صفر می شود که یک منحنی بسته تشکیل شود و همه s_i ها در اتصال پاره خط ها به هم حذف شوند. در مدل آیزینگ یک بعدی با شرایط مرزی پریودیک تنها دو منحنی بسته وجود دارد، یکی منحنی ای با طول صفر (یعنی همان جمله متناسب با یک) و دیگری منحنی با طول N . این دو جمله به تابع پارش نهایی در معادله (۲۶) منجر می شوند. نکته مهم این است که همین روش را می توان برای مدل آیزینگ دو بعدی یا سه بعدی هم بکار برد و حداقل در دماهای بالا تابع پارش را تا رتبه های پایین حساب کرد.

■ راه حل سوم: روش ماتریس انتقال

این روش بر خلاف روش های قبلی برای وقتی که میدان مغناطیسی نیز حضور داشته باشد به کار می رود. به همین جهت آن را در بخش بعدی توضیح می دهیم.

۳ مدل آیزینگ یک بعدی در حضور میدان مغناطیسی

یکی از قدرتمندترین و عمومی ترین روش ها برای حل مدل آیزینگ و مدل های مشابه، روش ماتریس انتقال^۹ نام دارد. ایده این روش را برای مدل یک بعدی آیزینگ توضیح می دهیم ولی خواننده می تواند براحتی آن را برای مدل های دیگر و برای بعد ۲ نیز صورت بندی کند. فرض کنید که

^۹Transfer Matrix Method

در هر نقطه از یک شبکه یک بعدی متغیری آماری داریم که آن را با S نشان می دهیم. S لزوما دو مقدار ± 1 ندارد و می تواند Q مقدار مختلف را اختیار کند. برای سادگی نیز از S به عنوان متغیر اسپین نام می بریم اگر چه ممکن است واقعا S یک متغیر اسپینی نباشد. انرژی هر هیئت دلخواه از اسپین ها را نیز به ترتیب زیر می نویسیم:

$$H(S_1, S_2, \dots, S_N) = \sum_{i=1}^N h(S_i, S_{i+1}), \quad (27)$$

که در آن $h(S, S')$ یک تابع متقارن از S و S' است. شرط مرزی را نیز پریودیک می گیریم یعنی $S_{N+1} = S_1$. تابع پارش برابر است با:

$$Z_N = \sum_{S_1, S_2, \dots, S_N} e^{-\beta h(S_1, S_2)} e^{-\beta h(S_2, S_3)} \dots e^{-\beta h(S_N, S_1)} \quad (28)$$

حال ماتریس T را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$\langle S|T|S' \rangle := e^{-\beta h(S, S')} \quad (29)$$

ماتریس T یک ماتریس $Q \times Q$ است و به آن ماتریس انتقال گفته می شود. بنابراین تابع پارش به این صورت در می آید:

$$Z_N = \sum_{S_1, S_2, \dots, S_N} \langle S_1|T|S_2 \rangle \langle S_2|T|S_3 \rangle \dots \langle S_N|T|S_1 \rangle = \text{tr}(\mathcal{T}^N) \quad (30)$$

در نتیجه محاسبه تابع پارش تبدیل می شود به محاسبه ویژه مقدارهای یک ماتریس $Q \times Q$ که از مسئله اولی بسیار ساده تر است. برای مدل

آیزینگ یک بعدی ماتریس T دویعدی است. در این حالت داریم

$$\langle S|T|S' \rangle := e^{\beta J S S' + \frac{\beta B}{2} (S + S')} \quad (31)$$

و یا

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} e^{\beta J + \beta B} & e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} & e^{\beta J - \beta B} \end{pmatrix} \quad (32)$$

ویژه مقدارهای این ماتریس براحتی تعیین می شوند و برابرند با:

$$\lambda_{\pm} = e^{\beta J} \left(\cosh \beta B \pm \sqrt{\sinh^2 \beta B + e^{-4\beta J}} \right) \quad (33)$$

در نتیجه تابع پارش برابر خواهد بود با:

$$Z_N = \lambda_1^N + \lambda_2^N \quad (34)$$

که در آن λ_1 ویژه مقدار بزرگ تر است. در حد ترمودینامیک یعنی وقتی که N به سمت بی نهایت میل می کند، خواهیم داشت:

$$f = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{F}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{-kT \ln Z_N}{N} = -kT \ln \lambda_1. \quad (35)$$

بنابراین بدست می آوریم:

$$f = -J - kT \ln \left[\cosh \beta B + \sqrt{\sinh^2 \beta B + e^{-4\beta J}} \right]. \quad (36)$$

از این عبارت می توان تمام کمیت های ترمودینامیکی را به دست آورد. در واقع از رابطه

$$dF = -SdT - MdB$$

یا شکل نافزونور آن (به ازای هر اسپین) یعنی

$$df = -sdT - mdB$$

می توان مغناطش به ازای هر اسپین یا نفوذپذیری مغناطیسی و بقیه کمیت ها را حساب کرد. نکته این است که این عبارت در نگاه اول به عنوان تابعی از T هیچ نوع ناپیوستگی در بقیه کمیت ها از خود نشان نمی دهد. اما اگر خوب به شکل (۲) نگاه کنیم، متوجه می شویم که وقتی دما به سمت صفر میل می کند، مغناطش در نقطه $B = 0$ آماده یک پرش از مقدار -1 به $+1$ است که به معنای این است که در دمای صفر، یک نوع گذار فاز (یعنی تغییر ناپیوسته ای در مغناطش به ازای یک تغییر خیلی کوچک در میدان مغناطیسی) را شاهد هستیم. این کیفیت را در کنار شکل (۲) از رابطه تحلیلی هم می توان بدست آورد. اگر در عبارت f دما را به سمت صفر ببریم عبارت $e^{-4\beta J}$ به سمت صفر میل خواهد کرد و در نتیجه تابع انرژی آزاد به صورت زیر در می آید:

$$f_{T \rightarrow 0} = -J - kT \ln \left[\cosh \beta B + \sqrt{\sinh^2 \beta B} \right] = -J - \lim_{T \rightarrow 0} kT \ln \left[\cosh \frac{B}{kT} + \left| \sinh \frac{B}{kT} \right| \right] \quad (37)$$

در نتیجه f برابر می شود با:

$$f_{T \rightarrow 0} = \begin{cases} -J - kT \ln e^{\frac{B}{kT}} = -J - B & , \quad B > 0 \\ -J - kT \ln e^{\frac{-B}{kT}} = -J + B & , \quad B < 0 \end{cases} \quad (۳۸)$$

در نتیجه از رابطه $df = -sdT - mdB$ بدست می آوریم:

$$m(T=0) = \begin{cases} 1 & B > 0 \\ -1 & B < 0 \end{cases} \quad (۳۹)$$

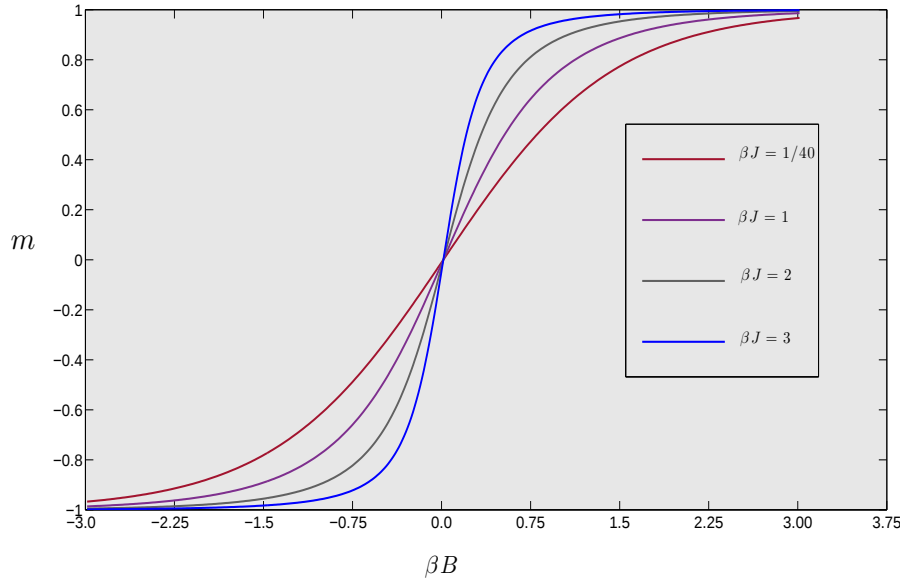
در دمای دلخواه هم می توانیم مغناطش را بدست آوریم و رفتار حدی بالا را ببینیم. از رابطه کامل تابع انرژی آزاد داریم:

$$m(T) = -\frac{\partial f}{\partial B} = \frac{\sinh \beta B}{\sqrt{\sinh^2 \beta B + e^{-4\beta J}}}. \quad (۴۰)$$

از این رابطه در حد $T \rightarrow 0$ نتیجه می گیریم که

$$m(T \rightarrow 0) = \frac{\sinh \beta B}{|\sinh \beta B|} = \text{sign}(B). \quad (۴۱)$$

شکل (۲) مقدار مغناطش را بر حسب βB در مقادیر مختلف βJ نشان می دهد.



شکل ۲: مغناطش متوسط به ازای هر اسپین در شرایط مختلف.

این ناپیوستگی در بقیه کمیت های ترمودینامیکی نیز خود را نشان می دهد. به عنوان مثال می دانیم که به این ترتیب دیده می شود که در $T = 0$ ، تابع f یک ناپیوستگی از خود نشان می دهد. به طور کلی با داشتن تابع انرژی آزاد می توانیم تمام خصوصیات ترمودینامیکی این سیستم را بدست آوریم. می دانیم که

$$\chi(B, T) = \frac{\partial m}{\partial B} \quad (42)$$

از روی شکل (۲) می بینیم که نفوذپذیری مغناطیسی در میدان مغناطیسی $B = 0$ یعنی $\chi(B = 0, T)$ وقتی که دما را کم می کنیم بزرگ و بزرگ تر می شود و در دمای صفر به سمت بی نهایت میل می کند:

$$\chi(B = 0, T \rightarrow 0) = \infty, \quad (43)$$

که نشانه دیگری از پدیده گذار فاز در دمای صفر است.

هم چنین می توان دید که انرژی نیز در دمای صفر نسبت به تغییر خیلی کوچک میدان مغناطیسی به طور ناگهانی تغییر می کند. در واقع در دمای صفر مجموعه اسپین ها به حالت پایه انرژی خود می روند، چون هیچ افت و خیز گرمایی وجود ندارد تا اسپین ها را برگرداند و به حالت های بالاتر

ببرد. بنابراین با توجه به عبارت انرژی یعنی

$$H = -J \sum_{i=1}^N S_i S_{i+1} - B \sum_i S_i$$

در دمای صفر کلیه اسپین ها بسته به جهت میدان مغناطیسی به یکی از دو حالت زیر می روند:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (1, 1, 1, 1, \dots, 1, 1, 1, 1) & E = -JN - BN \quad \text{if } B > 0 \\ (-1, -1, -1, \dots, -1, -1, -1) & E = -JN + BN \quad \text{if } B < 0 \end{array} \right. \quad (44)$$

■ تمرین: نشان دهید که نفوذ پذیری مغناطیسی در مدل آیزینگ برابر است با:

$$\chi = \frac{\beta \cosh \beta B e^{-4\beta J}}{(\sinh^2 \beta B + e^{-4\beta J})^{\frac{3}{2}}}. \quad (45)$$

از جمله می توان نفوذپذیری مغناطیسی را در میدان مغناطیس $B = 0$ حساب کنیم:

$$\chi(B=0) = \frac{e^{\frac{2J}{kT}}}{kT}, \quad (46)$$

که نشان دهنده این است که نفوذ پذیری مغناطیسی در دمای صفر به سمت بی نهایت میل می کند.

■ تمرین: تابع پارش مدل آیزینگ را بدون مغناطیسی برای شرایط مرزی باز زیر بدست آورید. در این شرایط مرزی اسپین اول همواره در

حالت $s_1 = +1$ و اسپین آخر هم همواره در حالت $s_N = +1$ قرار دارند و در این مقادیر ثابت شده اند. راهنمایی: از روش ماتریس انتقال استفاده کنید.

۴ توابع همبستگی

در مطالعه هر مدل آماری یا بس ذره ای کار ما با محاسبه تابع پارش تمام نمی شود. این محاسبه اگر چه مهم ترین گام است اما هنوز تا درک رفتار سیستم بس ذره ای راه درازی در پیش داریم. بسیاری از خصوصیات فیزیکی یک مدل بس ذره ای از محاسبه توابع همبستگی^{۱۰} بدست می آیند.

^{۱۰}Correlation Functions

این توابع همبستگی که به آنها توابع n نقطه ای^{۱۱} نیز می گویند، همانطور که از اسم شان پیداست، نشان می دهند که گروه های ذرات در این سیستم بس ذره ای چه نوع همبستگی ای با هم دارند. تابع دو نقطه همبستگی جفت های ذرات و تابع سه نقطه ای هم بستگی گروه های سه تایی از ذرات را نشان می دهد. تابع یک ذره ای نیز رفتار متوسط تک تک ذرات را نشان می دهد. طبیعتا در این میان نقش توابع یک نقطه ای و دو نقطه ای از اهمیت بیشتری برخوردار است. مهم ترین خواص ترمودینامیکی به همین دو نوع تابع همبستگی مربوط اند. در ادامه نخست در باره معنای تابع دو نقطه ای و سپس روش محاسبه آن بیشتر توضیح می دهیم.

۱.۴ معنای تابع همبستگی

یک تابع همبستگی مثل $\langle S_i S_j \rangle$ را می توان به روش های مختلف حساب کرد. اما قبل از محاسبه بهتر است معنای آن را دریابیم. معلوم است که هروقت S_i و S_j تمایل به هم جهت بودن داشته باشند، $\langle S_i S_j \rangle$ مقدار بیشتری دارد. این موضوع را به ترتیب زیر می توان دریافت: فرض کنید که دو متغیر تصادفی x و y تابع توزیع احتمال $P(x, y)$ را داشته باشند. این دو متغیر مقادیر $+1$ و -1 را اختیار می کنند. در این صورت داریم:

$$P(x = y) = P(1, 1) + P(-1, -1) = \langle \delta_{x,1} \delta_{y,1} \rangle + \langle \delta_{x,-1} \delta_{y,-1} \rangle \quad (۴۷)$$

اما می توانیم بنویسیم $\delta_{x,1} = \frac{1+x}{2}$ و $\delta_{x,-1} = \frac{1-x}{2}$. در نتیجه می توان نوشت:

$$P(x = y) = \frac{1}{4} \langle (1+x)(1+y) \rangle + \frac{1}{4} \langle (1-x)(1-y) \rangle = \frac{1}{2} (1 + \langle xy \rangle). \quad (۴۸)$$

بنابراین نشان دادیم که:

$$P(S_i = S_j) = \frac{1}{2} (1 + \langle S_i S_j \rangle), \quad P(S_i = -S_j) = \frac{1}{2} (1 - \langle S_i S_j \rangle). \quad (۴۹)$$

این رابطه نشان می دهد که تابع همبستگی $\langle S_i S_j \rangle$ مستقیما به احتمال هم جهت بودن S_i و S_j مربوط است.

تابع همبستگی معنای دیگری نیز دارد. این کمیت در واقع نشان می دهد که مقدار مغناطش در نقطه i یعنی $\langle S_i \rangle$ چقدر نسبت به تغییرات میدان مغناطیسی در نقطه j حساس است. برای درک این نکته سیستمی را در نظر بگیرید که میدان مغناطیسی ناهمگن دارد. هامیلتونی این سیستم

^{۱۱}n-point functions

به شکل زیر است:

$$H = H_0(S_1, S_2, \dots, S_N) - \sum_i B_i S_i. \quad (50)$$

که در آن H_0 نشان دهنده برهم کنش های بین اسپین هاست که می تواند شکل خیلی کلی ای داشته باشد. همانطور که می بینید هامیلتونی این سیستم خیلی کلی است و مختص مدل آیزینگ نیست. در حقیقت نتیجه ای که بدست می آوریم کاملاً کلی است و ربطی به مدل خاص آیزینگ ندارد و در همه ابعاد نیز برقرار است. می دانیم که تابع پارش این سیستم به صورت زیر است:

$$Z = \sum_{\{S\}} e^{\beta \sum_i B_i S_i - \beta H_0}. \quad (51)$$

برای سادگی نمادگذاری موقتاً نماد $\tilde{B}_i$ را به صورت $\tilde{B}_i := \beta B_i$ تعریف می کنیم. با توجه به این رابطه و این نماد بدست می آوریم:

$$\langle S_i \rangle = \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \tilde{B}_i}, \quad \langle S_i S_j \rangle = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \tilde{B}_i \partial \tilde{B}_j}. \quad (52)$$

حال عبارت $\frac{\partial \langle S_i \rangle}{\partial \tilde{B}_j}$ را حساب می کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle S_i \rangle}{\partial \tilde{B}_j} &= \frac{\partial}{\partial \tilde{B}_j} \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \tilde{B}_i} \right) \\ &= \frac{-1}{Z^2} \frac{\partial Z}{\partial \tilde{B}_j} \frac{\partial Z}{\partial \tilde{B}_i} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \tilde{B}_j \partial \tilde{B}_i} \\ &= -\langle S_i \rangle \langle S_j \rangle + \langle S_i S_j \rangle. \end{aligned} \quad (53)$$

بنابراین به طور کلی رابطه زیر را بین تابع همبستگی و تابع پاسخ^{۱۲} یک سیستم مغناطیسی بدست آوردیم:

$$G(i, j) \equiv \langle S_i S_j \rangle - \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle = kT \frac{\partial \langle S_i \rangle}{\partial B_j}. \quad (54)$$

این رابطه بیان می کند که تابع G_{ij} در واقع مقدار حساسیت مغناطش در نقطه i را نسبت به تغییرات میدان مغناطیسی در نقطه j می سنجد.

حال می پردازیم به محاسبه دقیق تابع همبستگی در مدل آیزینگ یک بعدی. مثل تابع پارش، محاسبه تابع همبستگی نیز بسته به بود یا نبود میدان مغناطیسی و یا نوع شرایط مرزی به روش های متفاوتی قابل انجام است. در زیر بعضی از این روش ها را توضیح می دهیم. این روش ها منحصر به یک بعد هستند اگر چه به طور کلی می توان هسته این روش ها را به دو بعد نیز تعمیم داد.

^{۱۲} Response Function

۲.۴ محاسبه تابع همبستگی و طول همبستگی در غیاب میدان مغناطیسی

تابع همبستگی بین دو اسپین با افزایش فاصله بین آنها کم می شود. اغلب اوقات (یعنی وقتی به دمای بحرانی نزدیک نشده ایم) این همبستگی به صورت نمایی کم می شود. در واقع می توان نوشت:

$$G(i, j) \equiv \langle S_i S_j \rangle - \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle \sim e^{-\frac{|i-j|}{\xi}} \quad (55)$$

که در آن معنای $\sim$ این است که از مقادیر ثابت یا توابعی از فاصله بین دو اسپین که تغییرات زیاد ندارند صرف نظر کرده ایم و توجه خود را به کاهش نمایی همبستگی معطوف کرده ایم. این رابطه در واقع نشان می دهد که اسپین ها تا فاصله ξ نسبت به هم همبسته هستند و پس از این فاصله همبستگی آنها خیلی ضعیف می شود. در سیستم دو بعدی مثل این است که جزیره هایی از اسپین های همبسته بوجود می آید که اندازه شان از مرتبه ξ است. در واقع مثل این است که سیستم میکروسکوپی آیزینگ مثل یک سیستمی رفتار می کند که دیگر مقیاس طولی اش فاصله بین اسپین ها نیست بلکه همین طول همبستگی است. به همین دلیل است که محاسبه این طول همبستگی اهمیت خیلی زیادی دارد. این طول همبستگی را نیز به روش های متفاوت می توان محاسبه کرد. یک راه برای وقتی که شرایط مرزی باز باشد به ترتیب زیر است. نخست هامیلتونی را به طور موقت تغییر می دهیم به شکلی که همه ضرایب جفت شدگی با هم متفاوت باشند. به این ترتیب، تابع پارش برابر است با:

$$Z(K_1, K_2, \dots, K_N) = \sum_{S_1, S_2, \dots, S_N} e^{\sum_{i=1}^N K_i S_i S_{i+1}}, \quad (56)$$

و

$$Z(K) = Z(K_1, K_2, \dots, K_N) |_{K_i=K}$$

. در این صورت داریم:

$$\langle S_i S_{i+1} \rangle = \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial K_i}, \quad \langle S_i S_{i+2} \rangle = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial K_i \partial K_{i+1}}, \quad \langle S_i S_{i+r} \rangle = \frac{1}{Z} \frac{\partial^r Z}{\partial K_i \partial K_{i+1} \dots \partial K_{i+r-1}}. \quad (57)$$

پس از مشتق گیری ها می توان K_i ها را مساوی K قرار داد. در شرایط مرزی باز براحتی می توان تابع پارش را حساب کرد. این تابع پارش برابر است با:

$$Z = 2 \prod_{i=1}^{N-1} (2 \cosh K_i), \quad (58)$$

که از آن نتیجه می گیریم:

$$\langle S_i S_{i+r} \rangle = (\tanh K)^r. \quad (59)$$

می توانیم این رابطه را به شکل بهتری بنویسیم:

$$\langle S_i S_{i+r} \rangle = e^{-\frac{r}{\xi}} \quad (60)$$

که در مقایسه با رابطه قبلی مقدار زیر را برای ξ که به آن طول همبستگی می گوئیم بدست می دهد:

$$\xi = \frac{1}{\ln \coth K}. \quad (61)$$

راه دیگر برای وقتی که شرایط مرزی باز باشد، در تمرین ها آمده است.

۳.۴ محاسبه تابع همبستگی در حضور میدان مغناطیسی- روش ماتریس انتقال

نخست روش بدست آوردن متوسط اسپین را مرور می کنیم. می دانیم که

$$\begin{aligned} \langle S_i \rangle &= \frac{1}{Z} \sum_{\{S_1, \dots, S_N\}} S_i e^{-\beta H} \\ &= \frac{1}{Z} \sum_{\{S_1, \dots, S_N\}} S_i \langle S_1 | \mathcal{T} | S_2 \rangle \langle S_2 | \mathcal{T} | S_3 \rangle \cdots \langle S_{i-1} | \mathcal{T} | S_i \rangle \langle S_N | \mathcal{T} | S_1 \rangle. \end{aligned} \quad (62)$$

حال ماتریس σ را چنان تعریف می کنیم که

$$\sigma |S\rangle = S |S\rangle \quad (63)$$

یعنی

$$\sigma |1\rangle = |1\rangle, \quad \sigma |-1\rangle = -|-1\rangle, \longrightarrow \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (64)$$

در این صورت رابطه (۶۲) را به شکل زیر می توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} \langle S_i \rangle &= \frac{1}{Z} \sum_{\{S_1, \dots, S_N\}} \langle S_1 | \mathcal{T} | S_2 \rangle \langle S_2 | \mathcal{T} | S_3 \rangle \cdots \langle S_{i-1} | \mathcal{T} \sigma | S_i \rangle \cdots \langle S_N | \mathcal{T} | S_1 \rangle \\ &= \frac{1}{Z} \text{tr}(\mathcal{T}^{i-1} \sigma \mathcal{T}^{N-i+1}) = \frac{\text{tr}(\sigma \mathcal{T}^N)}{\text{tr}(\mathcal{T}^N)} \end{aligned} \quad (65)$$

در حد ترمودینامیک تنها بزرگترین ویژه مقدار مهم است و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\langle S_i \rangle = \langle \lambda_{max} | \sigma | \lambda_{max} \rangle. \quad (66)$$

به این ترتیب متوسط اسپین در مسئله مکانیک آماری کلاسیک در یک بعد تبدیل شده است به یک متوسط شبه کوانتومی در صفر بعد. یعنی متوسط یک عملگر σ که متناظر با اسپین هست روی یک حالت در یک فضای هیلبرت که دیگر نه مختص یک زنجیره یک بعدی بلکه مختص تنها یک اسپین است. این تناظر به صورت کلی تر و با دامنه وسیع تری قابل اثبات است به این معنا که یک مدل مکانیک آماری روی یک شبکه d بعدی معادل است با یک سیستم کوانتومی در یک شبکه $d-1$ بعدی. در ادامه این درس باز هم به این تناظر باز خواهیم گشت. حال به محاسبه تابع همبستگی می پردازیم. بر خلاف روش های قبلی که تنها وقتی کاربرد داشتند که میدان مغناطیسی صفر بود، در این روش میدان مغناطیسی می تواند غیر صفر باشد. شرایط مرزی را پریودیک در نظر می گیریم و می نویسیم

$$\langle S_i S_j \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{S\}} S_i S_j \langle S_N | T | S_{N-1} \rangle \cdots \langle S_{i+1} | T | S_i \rangle \cdots \langle S_{j+1} | T | S_j \rangle \cdots \langle S_N | T | S_1 \rangle. \quad (67)$$

با تعریف ماتریس σ_z به صورت $\sigma_z = \sum_{1,-1} S |S\rangle \langle S|$ یا $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \langle S_i S_j \rangle &= \frac{1}{Z} \sum_{\{S\}} \langle S_N | T | S_{N-1} \rangle \cdots \langle S_{j+1} | T \sigma_z | S_j \rangle \cdots \langle S_{i+1} | T \sigma_z | S_i \rangle \cdots \langle S_2 | T | S_1 \rangle \\ &= \frac{1}{Z_N} \text{tr}(\mathcal{T}^{N-j} \sigma_z \mathcal{T}^{j-i} \sigma_z \mathcal{T}^i) \\ &= \frac{\text{tr}(\mathcal{T}^{N-j} \sigma_z \mathcal{T}^{j-i} \sigma_z \mathcal{T}^i)}{\text{tr}(\mathcal{T}^N)}. \end{aligned} \quad (68)$$

در حد ترمودینامیک، وقتی که $N \rightarrow \infty$ تنها بزرگترین ویژه مقدار و ویژه بردار مربوط به ماتریس انتقال باقی می ماند و صورت و مخرج کسر بالا نیز ساده می شود:

$$\langle S_i S_j \rangle = \frac{\langle \lambda_+ | \sigma_z \mathcal{T}^{j-i} \sigma_z | \lambda_+ \rangle}{\lambda_+^{j-i}}. \quad (69)$$

حال می خواهیم تابع همبستگی متصل یعنی $G_{i,j} = \langle S_i S_j \rangle - \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle$ را در حد فاصله های بزرگ یعنی $|j-i| \gg 1$ بدست آوریم. دومین ویژه مقدار ماتریس انتقال را از نظر اندازه با λ_- نشان می دهیم. اگر یک عملگر واحد به صورت $I = \sum_{\lambda} |\lambda\rangle \langle \lambda|$ قبل از σ_z باز کنیم و از توان $|j-i|$ بقیه ویژه مقادیرها در مقابل ویژه مقدار اول و دوم صرف نظر کنیم بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} \langle S_i S_j \rangle - \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle &= \lambda_+^{i-j} \langle \lambda_+ | \sigma_z \mathcal{T}^{j-i} \sigma_z | \lambda_+ \rangle - \langle \lambda_+ | \sigma_z | \lambda_+ \rangle^2 \\ &= \lambda_+^{i-j} \left[\langle \lambda_+ | \sigma_z | \lambda_+ \rangle \lambda_+^{j-i} \langle \lambda_+ | \sigma_z | \lambda_+ \rangle + \langle \lambda_+ | \sigma_z | \lambda_- \rangle \lambda_-^{j-i} \langle \lambda_- | \sigma_z | \lambda_+ \rangle \right] - [\langle \lambda_+ | \sigma_z | \lambda_+ \rangle]^2 \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^{j-i} \langle \lambda_+ | \sigma_z | \lambda_- \rangle \langle \lambda_- | \sigma_z | \lambda_+ \rangle. \quad (70)$$

به این ترتیب می فهمیم که

$$G_{ij} \sim e^{|j-i| \ln \frac{\lambda_-}{\lambda_+}} \sim e^{-\frac{|j-i|}{\xi}}, \quad (71)$$

که در آن ξ یعنی طول همبستگی برابر است با:

$$\xi = \frac{1}{\ln(\frac{\lambda_+}{\lambda_-})}. \quad (72)$$

بنابراین طول همبستگی توسط نسبت بزرگترین ویژه مقدار T به ویژه مقدار بعدی داده می شود. این نتیجه وقتی که مدل های فراتر از مدل آیزینگ یک بعدی نیز مطالعه می شوند درست است. در واقع استدلال بالا هیچ ربطی به یک مدل خاص نداشت و به طور کلی معتبر بود. از مدل آیزینگ یک بعدی داریم:

$$\frac{\lambda_+}{\lambda_-} = \frac{\cosh \beta B + \sqrt{\sinh^2 \beta B + e^{-4\beta J}}}{\cosh \beta B - \sqrt{\sinh^2 \beta B + e^{-4\beta J}}} \quad (73)$$

در حالت های حدی این عبارت و در نتیجه طول همبستگی شکل ساده ای پیدا می کند. مثلاً در میدان مغناطیسی صفر، خواهیم داشت:

$$\xi(B=0) = \frac{1}{\ln(\coth \frac{2J}{kT})}. \quad (74)$$

هم چنین براحتی می توان دریافت که:

$$\xi(T \rightarrow \infty) = 0, \quad \xi(T \rightarrow 0) \rightarrow \sim \frac{1}{2} e^{\frac{2J}{kT}} \rightarrow \infty. \quad (75)$$

۴.۴ شکست تقارن

بسیاری از گذارهای فاز همراه با شکست تقارن هستند. معنای این گزاره چیست؟ موجودی میکروسکوپی و خیالی را در نظر بگیرید که در آب زندگی می کند. وقتی که دمای آب بالاتر از دمای انجماد آب است دنیای این موجود میکروسکوپی تقارن کامل کروی و انتقالی دارد. همه جای

محیط اطرافش مثل هم در نقاط مختلف و هم جهت های مختلف یکسان هستند. وقتی که دما به زیر نقطه انجماد می رسد و آب یخ می بندد به ناگهان دنیای این موجود کوچک تغییر می کند و جهت های گوناگون دیگر یکی نیستند. هم چنین چون یخ یک ساختمان بلوری دارد تقارن انتقالی نیز دیگر وجود ندارد. بنابراین در اثر گذار فاز این تقارن ها شکسته شده اند. یک نمونه دیگر از شکست تقارن وقتی است که یک ماده فرومغناطیس دچار گذار فاز می شود. در دمای بالاتر از دمای بحرانی، دوقطبی های مغناطیسی در همه جهات پراکنده شده اند و هیچ جهت خاصی را بر جهت دیگر ترجیح نمی دهند. دنیای اطراف یک موجود میکروسکوپی کاملاً تقارن کروی دارد. اما وقتی که دما به زیر دمای بحرانی می رسد، دوقطبی ها در یک جهت خاص شروع به منظم شدن می کنند و مغناطش در یک راستا پدیدار می شود و این راستا بر راستاهای دیگر امتیاز پیدا می کند. این جهت کاملاً به طور تصادفی اختیار می شود به نحوی که اگر یک بار دیگر آزمایش را تکرار کنیم مغناطش خودبخود در یک جهت دیگر بوجود می آید که هیچ ربطی به جهت قبلی ندارد. این پدیده یعنی شکست خود بخود تقارن ۱۳ در بسیاری از گذار فاز ها وجود دارد و ما در درس های آینده در باره آن به تفصیل صحبت خواهیم کرد. البته باید توجه داشت که بعضی از گذار فاز ها نیز چنین پدیده ای را از خود نشان نمی دهند مثل تبدیل بخار به آب که در هر دو مورد تقارن کروی وجود دارد. هم چنین اخیراً نیز دسته ای از گذار فاز ها موسوم به گذار فاز توپولوژیک کشف شده اند که همراه با شکست تقارن نیستند.

۵.۴ شکست تقارن و خاصیت ارگودیک

چرا شکست تقارن از لحاظ نظری عجیب است؟ چرا این موضوع احتیاج به توجیه و توصیف زیربنایی دارد؟ برای فهم این موضوع به یک مثال ساده یعنی پدیده فرومغناطیس توجه می کنیم. برهم کنش اتم های یک ماده جامد که باعث ایجاد پدیده فرومغناطیس می شود را می توان به خوبی با هامیلتونی زیر توصیف کرد:

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \quad (76)$$

که در آن $\mathbf{S}_i$ دوقطبی دائمی اتمی است که در نقطه i از شبکه قرار دارد و J ، ثابت برهم کنش است. دوقطبی دائمی اتم ها با اسپین آنها متناسب است. همانطور که دیده می شود این هامیلتونی تحت دوران همه اسپین ها تغییر نمی کند. یعنی اینکه

$$H(\{\mathbf{S}_i\}) = H(\{\mathbf{S}'_i\}), \quad (77)$$

Spontaneous Symmetry Breaking^{۱۳}

که در آن $S'_i = RS_i$ و R یک عملگر دوران است. می دانیم که بنابر مکانیک آماری وقتی که سیستمی در دمای T قرار دارد، همه هیئت های ممکن با احتمال بولتزمن اشغال می شوند یعنی اینکه

$$P(\{S_i\}) = \frac{1}{Z} e^{-\beta H(\{S_i\})} \quad (78)$$

تقارن (77) نتیجه اش این است که

$$P(\{S_i\}) = P(\{S'_i\}) \quad (79)$$

یعنی همه حالت هایی که با دوران اسپین ها از یک دیگر بدست می آیند هم احتمال هستند. از جمله یک نتیجه این تقارن این است که

$$P(\{S_i\}) = P(\{-S_i\}) \quad (80)$$

زیرا با یک دوران به اندازه ۱۸۰ درجه حول یک محور می توان همه اسپین ها را به منهای خود آنها تبدیل کرد. چنین تقارنی معنایش این است که متوسط اسپین ها در حالت تعادل می بایست صفر باشد. از طرفی می بینیم که در دمای پایین تر از گذار فاز متوسط اسپین ها یا متوسط مغناطش غیر صفر می شود و به اصطلاح شکست تقارن رخ می دهد. سوالی که پیش روی ماست این است که چگونه می بایست این شکست تقارن را با توجه به اصول مسلم مکانیک آماری توضیح دهیم؟ برای توضیح این پدیده می بایست به اصل موضوع مکانیک آماری برگردیم و مبنای رابطه (78) را خوب بفهمیم.

می دانیم که رابطه (78) برای سیستم هایی است که در دمای ثابت قرار دارند. این رابطه از یک اصل کلی تر در مکانیک آماری استخراج می شود که بر مبنای آن یک سیستم بسته که در حال تعادل است همه میکرواحالت هایش را با احتمال یکسان اشغال می کند. بنابراین اگر بخواهیم مبنای شکست تقارن را بفهمیم می بایست مبنای این اصل را بفهمیم. هامیلتونی یک سیستم چه در مکانیک کوانتومی و چه در مکانیک کلاسیک تابعی است که باعث تحول آن سیستم در فضای فاز می شود. فضای فاز با توجه به درجات آزادی یک سیستم تعیین می شود. به عنوان مثال برای یک گاز که شامل N اتم است هر نقطه از فضای فاز با $6N$ متغیر مشخص می شود. در هر لحظه وضعیت کل سیستم (در اینجا کل اتم های گاز) با یک نقطه در این فضای بزرگ تعیین می شود. هامیلتونی سیستم باعث حرکت این نقطه در فضای فاز می شود. به دلیل شرایط مرزی (دیواره ها)، و هم چنین وجود نقص ها و ناخالصی ها و برهم کنش های کوچکی که الزاما در هامیلتونی ایده آل سیستم نوشته نشده اند نقطه نماینده این سیستم یک مسیر بسیار کاتوره ای را در فضای فاز طی می کند، شکل (3). به عنوان مثال در مورد یک گاز ایده آل، برخورد بین ذرات و بین ذرات و دیواره ها، باعث می شود که مسیر نقطه نماینده سیستم از یک خط راست به یک مسیر زیگزاکی و کاتوره ای همراه با شکستگی های

خیلی زیاد تبدیل شود. فاصله زمانی بین این زیگزاک ها چیزی در حدود زمان پویش آزاد میانگین اتم ها و فاصله مکانی بین آنها در حدود فاصله پویش آزاد اتم هاست. این مسیر به تدریج و با یک مقیاس زمانی که بستگی به سیستم مورد بحث دارد، فضای فاز را پر می کند. در چنین حالتی می توان گفت که وقتی که سیستم به حالت تعادل می رسد، این نقطه ی نماینده تمام فضای فاز را کم و بیش پر می کند و در فاصله زمانی ای که ما یک کمیت میکروسکوپی از سیستم را مشاهده می کنیم، نقطه ی نماینده سیستم تقریبا تمام فضای فاز را طی می کند. بیایید مختصات نقطه نماینده سیستم را به اختصار با x نشان دهیم، با قبول این نکته که x نشان دهنده مجموعی از مختصات است. تحت این شرایط هرگاه بخواهیم متوسط یک کمیت مثل $A(x)$ را حساب کنیم باید بنویسیم:

$$\langle A \rangle = \frac{1}{T} \int A(x(t)) dt \quad (۸۱)$$

که در آن T زمانی است که طول کشیده است که کمیت A اندازه گیری شود. دقت کنید که ممکن است که این زمان در مقیاس میکروسکوپی خیلی کوتاه باشد ولی در مقیاس میکروسکوپی بی اندازه بزرگ باشد. در چنین شرایطی می نویسیم:

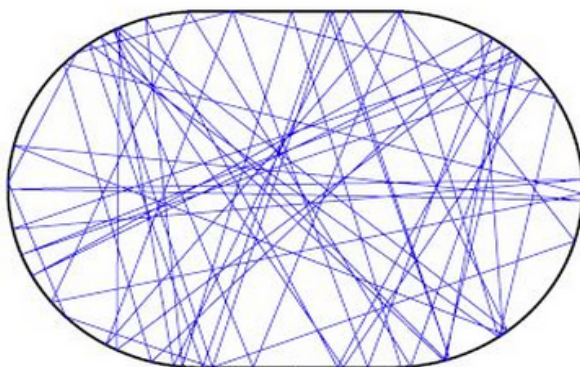
$$\langle A \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int A(x(t)) dt. \quad (۸۲)$$

این محاسبه به این معناست که تحول کمیت A را همراه با حرکت نقطه نماینده سیستم در تمام طول مسیر دنبال کرده و سپس متوسط کمیت A را محاسبه می کنیم. حال اگر T واقعا نسبت به زمان مشخصه تحول سیستم بزرگ باشد می توانیم این متوسط را بجای اینکه روی مسیر حرکت دنبال کنیم با اتکا به این که مسیر حرکت تمام فضای فاز را پر کرده است به صورت زیر حساب کنیم:

$$\langle A \rangle = \int dx A(x) \rho(x), \quad (۸۳)$$

که در آن $\rho(x)$ چگالی احتمال این است که نقطه نماینده سیستم در نقطه x و در ناحیه ای به حجم dx باشد. این که این دو نوع متوسط با هم مساوی هستند در واقع یک فرض است که به آن فرض ارگودیک^{۱۴} می گوئیم. این فرض را برای سیستم های خیلی ساده مثلا سیستمی که دارای یک ذره است می توان به طور دقیق ثابت کرد ولی برای سیستم های بزرگ تر اثباتی برای آن وجود ندارد.

^{۱۴}Hypothesis Ergodic



شکل ۳: نمایشی از اصل ارگودیک. در زمان های به اندازه کافی طولانی مسیر یک سیستم بسته در فضای فاز تقریباً تمام فضای فاز را می پوشاند و با احتمال یکسان می توان نقطه نماینده سیستم را در هر جایی از فضای فاز پیدا کرد. خاصیت ارگودیک برای یک توپ بیلیارد تقریباً به ازای هر شرایط اولیه ای برقرار است. منظور از تقریباً این است که مجموعه شرایط اولیه ای که این خاصیت برایشان برقرار نیست بی اندازه کوچک است.

در مکانیک آماری یاد می گیریم که برای سیستمی که در دمای ثابت قرار دارد، $\rho(x)$ برابر است با

$$\rho(x) = \frac{1}{Z} e^{-\beta H(x)}. \quad (۸۴)$$

حال می توانیم بفهمیم که چرا شکست تقارن رخ می دهد. فرض کنید که $H(x) = H(-x)$ باشد. این یک تقارن هامیلتونی است. بنابراین از بحث بالا به دست می آوریم که $\langle x \rangle = 0$. اما اگر در عمل ببینیم که $\langle x \rangle \neq 0$ است به این معناست که خاصیت ارگودیک برقرار نیست یا به عبارت دیگر شکسته شده است.^{۱۵} معنای این حرف این است که نقطه ی نماینده سیستم در طول مسیر حرکت خود به ناحیه ای رفته که در آنجا مثلاً x مقدارهای مثبت دارد و در آنجا گیر افتاده است یعنی روند دینامیک در آن ناحیه آنقدر کند بوده است (در مقایسه با زمان مشاهده ما) که این نقطه نتوانسته است به ناحیه های منفی نیز برسد. به این دلیل است که متوسط مقدار غیر صفر اختیار کرده است و تقارن شکسته شده است.

^{۱۵}Ergodicity Breaking

۵ چرا در مدل آیزینگ یک بعدی گذار فاز رخ نمی دهد؟

دیدیم که در مدل آیزینگ یک بعدی و در دمای غیر صفر گذار فاز رخ نمی دهد. در این بخش می خواهیم دلیل این پدیده را از نظر فیزیکی بفهمیم. این مسئله را می توان از راه های گوناگون توضیح داد.

۱.۵ استدلال مبتنی بر انرژی و شکست تقارن

حالت هایی را که می توانند نشان دهنده فاز منظم باشند در نظر می گیریم. فرض کنید که تمام اسپین ها در یکی از کمینه های انرژی مثل

$$C = (+ + + + + + \dots +),$$

قرار گرفته باشند. حال فرض کنید که یک جزیره یک بعدی از اسپین ها از حالت + به حالت - تغییر کنند، مثل حالت زیر:

$$C_1 = (+ + + + - - - - - - - - + + + + \dots +).$$

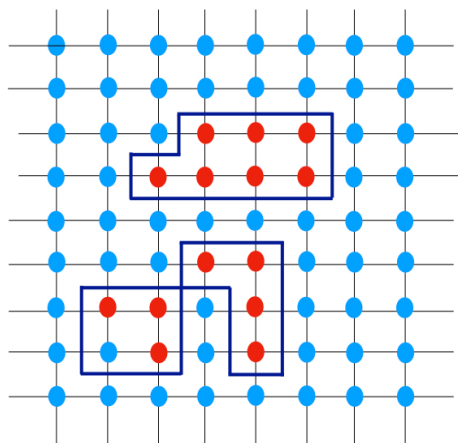
تفاوت انرژی این حالت و حالت قبلی برابر است با $E(C_1) - E(C) = 4J$. حال فرض کنید که یکی دیگر از اسپین ها نیز برگردد و حالت $C_2 = (+ + + - - + + + + \dots +)$ تشکیل شود. براحتی معلوم می شود که $E(C_2) - E(C_1) = 0$ و هرچند تا از اسپین ها را که برگردانیم دیگر احتیاجی به انرژی اضافی نداریم. معنای این حرف این است که این جزیره بدون صرف انرژی بیشتر می تواند در اثر اختلالات گرمایی بزرگ شده و به حالت $C' = (- - - - - - - - \dots - -)$ تبدیل شود، به عبارت دیگر دو حالت منظم $(+ + + + + \dots + + + + +)$ و $(- - - - - \dots - - - - -)$ تنها با یک سد انرژی میکروسکوپی به اندازه $4J$ از هم جدا شده اند و ارتفاع این سد ربطی به اندازه سیستم ندارد. بنابراین افت و خیزهای گرمایی اجازه نمی دهند که این سیستم یک بعدی در یکی از کمینه های انرژی گیر کند. به عبارت دیگر افت و خیزهای گرمایی اجازه شکست تقارن و پیدایش فاز منظم را نمی دهند.

۲.۵ استدلال مبتنی بر انرژی آزاد

این استدلال نخستین بار توسط رودولف پایرلز^{۱۶} فیزیکدان برجسته آلمانی - انگلیسی و یکی از معماران فیزیک حالت جامد و فیزیک هسته ای در قرن بیستم ارائه شده و به نام خود او شناخته می شود. سیستمی که در دمای ثابت T قرار دارد، سعی می کند به طرف حالت هایی برود که انرژی آزاد آنها کمتر باشد و وقتی به تعادل می رسد که این انرژی آزاد به کمترین مقدار خود رسیده باشد. انرژی آزاد با تابع $F = E - TS$ داده می

^{۱۶}Rudolf Peierls

شود. حال باید از خود سوال کنیم که آیا حالتی مثل $C_0 = (+ + + + + + + + +)$ می تواند حالتی باشد که در آن F کمترین مقدار خود را دارد؟ برای پاسخ به این سوال، انرژی آزاد حالت های نزدیک به C_0 را نگاه می کنیم. برای آنکه F در نقطه C_0 کمترین مقدار را داشته باشد می بایست انرژی آزاد حالت های نزدیک به C_0 از انرژی آزاد حالت C_0 بیشتر باشد. حالتی را در نظر بگیرید که در آن یکی از اسپین ها برگشته باشد. برای این حالت که آن را C' می نامیم، انرژی برابر است با $E_0 + 4J$ که در آن E_0 انرژی حالت C_0 است. ولی تعداد چنین حالت هایی N تاست، زیرا اسپین منفی می تواند در هر جایی از شبکه ی N تایی اتفاق افتاده باشد. بنابراین انرژی آزاد برای یک حالت ماکروسکوپی که انرژی اش برابر با $E_0 + 4J$ است برابر است با $F_1 = E_0 + 4J - kT \ln(N)$. در نوشتن این رابطه از این استفاده کرده ایم که آنتروپی یک ماکرو حالت که تمام میکرو حالت هایش با احتمال یکسان اشغال می شوند برابر است با $k \ln \Omega$ که در آن Ω تعداد میکرو حالت های مربوطه است. اما رابطه فوق نشان می دهد که با افزایش N همواره F منفی می شود مگر وقتی که T برابر با صفر باشد. بنابراین هروقت دمای غیر صفر داشته باشیم، حالت C_0 یا متناظر آن که همه اسپین ها منفی هستند نقاط کمینه تابع F و در نتیجه نقاط تعادل ترمودینامیکی نیستند. دقت کنید که این مسئله کاملاً مختص یک بعد است و در واقع برای همه مدل های یک بعدی که برهم کنش هایی با برد محدود دارند صادق است. این نوع استدلال در دو بعد و بالاتر نشان می دهد که گذار فاز در دمای محدود امکان پذیر است. در واقع اگر حالت C_0 و حالت های نزدیک به آن یعنی حالت هایی را که بعضی از اسپین ها برگشته اند، در دو بعد در نظر بگیریم آنگاه وضعیتی مثل شکل (۴) داریم:



شکل ۴: در دمای صفر همه اسپین ها در یک جهت قرار گرفته اند. در این شکل همه اسپین های زمینه $+1$ هستند ولی در اثرات و خیز گرمایی اینجا و آنجا جزیره هایی از اسپین های منفی شکل گرفته اند. انرژی این حالت ها از حالت زمینه به اندازه $\Delta E = 2J \times L(C)$ بیشتر است که در آن $L(C)$ محیط کل جزیره های تشکیل شده است. جزیره ها می توانند یک پارچه یا چند پارچه باشند.



شکل ۵: سر رودولف پایرلز

ق رودولف ارنست پایرلز، فیزیکدان نظری تأثیرگذار قرن بیستم، در تاریخ ۵ ژوئن ۱۹۰۷ در برلین به دنیا آمد. او یکی از معماران کلیدی فیزیک هسته‌ای و مکانیک کوانتومی مدرن محسوب می‌شود. پایرلز پس از تحصیل در آلمان و سوئیس، به دلیل ریشه‌های یهودی و مخالفت با رژیم نازی، در سال ۱۹۳۳ مجبور به ترک آلمان شد. او در بریتانیا اقامت گزید و شهروند این کشور شد. از مهم‌ترین دستاوردهای او می‌توان به موارد زیر اشاره کرد: مدل پوسته‌ای هسته اتم (با یوجین پاول و ویگنر)، نظریه انتقال حرارت در جامدات که اساس فیزیک حالت جامد مدرن را بنا نهاد. او هم چنین از پیشگامان توسعه راکتورهای هسته‌ای برای تولید انرژی بود. از او کتابهای درسی و مرجعی مثل "نظریه کوانتومی جامدات" ^۱ و "سورپرایزها در فیزیک نظری" ^۲ باقی مانده که نسل‌هایی از دانشجویان را آموزش داده‌اند. هم چنین یک کتاب خودنوشت زندگینامه نیز از او به یادگار مانده است به نام «چقدر کم به یاد می‌آورم» ^۳. اگرچه او هرگز به صورت انفرادی برنده جایزه نوبل نشد، اما شاگردان و همکارانش (از جمله سه برنده نوبل) عمیقاً تحت تأثیرش قرار گرفتند و او را "پدر فیزیک هسته‌ای نظری بریتانیا" می‌نامیدند. رودولف پیرلز در ۱۹ سپتامبر ۱۹۹۵ در آکسفورد درگذشت.

Quantum Theory of Solids^۱
Surprises in Theoretical Physics^۲
How little I remember^۳

یک حالت کمی بی‌نظم که در آن گروهی از اسپین‌ها برگشته و تشکیل یک جزیره داده‌اند در نظر بگیرید. تفاوت انرژی این حالت را از

انرژی حالت منظم با ΔE نشان می دهیم. اگر محیط جزیره را با L نشان دهیم، در این صورت خواهیم داشت:

$$\Delta E = 2JL. \quad (۸۵)$$

طبیعی است که تعداد زیادی میکرو حالت مشابه وجود دارد که همه آنها تفاوت انرژی شان با مقدار بالا نشان داده می شود. همگی این حالت ها جزیره های یک یا چند پارچه ای را نشان می دهد که مجموع محیط های آنها برابر با L است. تعداد این جزیره ها را می توان تخمین زد. در واقع اگر تعداد چنین جزیره هایی را با N_L نشان دهیم، می توانیم بنویسیم

$$N_L \approx \frac{N(z-1)^L}{L}. \quad (۸۶)$$

که در آن z تعداد همسایه های یک نقطه از شبکه است. دلیل این رابطه این است که می توان تصور کرد که محیط یک جزیره که از یک نقطه مشخص مثل مبدا شروع می کند و به همان نقطه برمی گردد در واقع مسیری است که یک ولگرد از خود به جا می گذارد و این ولگرد در هر قدم از ولگشت خود $1 - z$ انتخاب دارد و چون تعداد قدم ها برابر با L است بنابراین تعداد کل مسیرهای ممکن که می تواند طی کند برابر است با $(z-1)^L$. اما نقطه شروع به جای مبدا مختصات می تواند هر نقطه دیگری از شبکه باشد پس باید این عدد را در N ضرب کرد، اما از آنجا که هر مسیر از L نقطه عبور می کند، برای پرهیز از دوباره شماری باید تعداد بدست آمده را بر L تقسیم کرد. به این ترتیب بدست می آوریم که میزان تغییر انرژی آزاد برای این ماکرو حالت برابر است با:

$$\Delta F \approx \Delta E - T\Delta S = \Delta E - kT\Delta N_L = 2JL - kTL \ln(z-1) = L(2J - kT \ln(z-1)) \quad (۸۷)$$

این رابطه نشان می دهد که یک دما وجود دارد که بالاتر از آن به هم خوردن نظم آیزینگ باعث کاهش انرژی آزاد می شود. این دما همان دمای گذار است و توسط رابطه زیر داده می شود:

$$T_c = \frac{2J}{k \ln(z-1)}, \quad (۸۸)$$

در دماهای پایین تر از T_c نظم فرومغناطیسی پایدار است و در دماهای بالاتر، این نظم پایدار نیست. به چند نکته باید توجه کرد:

- نکته اول: این استدلال و نتیجه آن برای هر مدل آماری با تقارن گسسته کاربرد دارد زیرا اساساً بر مفهوم دیواره حوزه^{۱۷} مبتنی است که برای هر مدل با تقارن گسسته مطرح است. برای سیستم هایی که در آن متغیر میکروسکوپی به صورت پیوسته تغییر می کند، مثل وقتی که با گشتاورهای مغناطیسی سه بعدی سروکار داریم، این استدلال کاربرد ندارد.

- نکته دوم: این استدلال برای بعد یک که در آن تعداد همسایه ها یعنی z برابر با ۲ است، کاربرد ندارد. زیر در بعد یک، هر دیواره حوزه تنها دو نقطه مرزی دارد و این تعداد نیز مستقل از اندازه دیواره حوزه است. یعنی بر خلاف آنچه که در بعدهای بالا می بینیم، محیط یک دیواره حوزه با سائز آن بزرگ نمی شود.

۶ مسئله ها و تمرین ها:

- مسئله یک: مدل پاتر 3 حالت^{۱۸} را در نظر بگیرید. این مدل روی هر شبکه ای قابل تعریف است. در هر نقطه از شبکه یک متغیر تعریف می شود که 3 حالت مختلف 1, 0, -1 را اختیار می کند. حالت نقطه i ام را با S_i نشان می دهیم. اصطلاحاً متغیر S_i را متغیر اسپین در مکان i ام می خوانیم اگر چه این متغیر اسپین به معنای کوانتومی و متداول آن نیست. هامیلتونی این سیستم به شکل زیر نوشته می شود:

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \delta(S_i, S_j) - B \sum_i \delta_{S_i, 0} \quad (۸۹)$$

- میدان خارجی B سعی می کند که همه اسپین ها را در راستای 0 منظم کند. در تقریب میدان متوسط، تابع پارش این مدل را به عنوان تابعی از βJ و βB حساب کنید. آیا در این مدل نظم خود بخود اتفاق می افتد؟ در صورت پاسخ مثبت دمای بحرانی را بدست آورید. (راهنمایی: سعی کنید که عبارت $\delta_{S, S'}$ را به صورت یک عبارت بر حسب S و S' و توان های آنها بنویسید.)

- مسئله دو: مدل آیزینگ یک بعدی را در شرایط مرزی پریودیک و میدان مغناطیسی صفر در نظر بگیرید. تابع همبستگی بین دو نقطه با فاصله l محاسبه کنید.

- مسئله سه: مدل آیزینگ یک بعدی را در شرایط مرزی پریودیک و میدان مغناطیسی صفر در نظر بگیرید. فرض کنید که شدت برهم کنش اسپین ها یک در میان J و J' است. تعداد اسپین ها را زوج بگیرید. تابع پارش و مغناطش متوسط را حساب کنید. انرژی متوسط را نیز در دمای T حساب کنید.

■ مسئله چهار: هامیلتونی مدل آیزینگ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$H = J \sum_{i=1}^N S_i S_{i+1} \quad (90)$$

شرایط مرزی را پرودیک و تعداد اسپین ها را نیز زوج بگیرید. شدت برهم کنش یعنی J را مثبت بگیرید. در دمای صفر اسپین ها در چه حالتی قرار می گیرند؟ آیا این حالت واگنی دارد؟ برای چنین سیستمی نمی توان پارامتر نظم را به صورت مغناطش متوسط تعریف کرد، چرا که این پارامتر نظم در دمای صفر برابر با صفر است و حال آنکه در دمای صفر می بایست سیستم یک نوع نظم داشته باشد. به جای مغناطش متوسط، می بایست پارامتر زیر را به عنوان پارامتر نظم که Staggered Magnetization نامیده می شود، در نظر بگیریم:

$$M_{st} := \sum_{i=1}^N (-1)^i \langle m_i \rangle. \quad (91)$$

مقدار پارامتر نظم را بر حسب دما محاسبه کنید.

■ مسئله پنج: در مدل آیزینگ یک بعدی، ضریب نفوذ مغناطیسی را که به صورت $\chi := \frac{\partial m}{\partial B}$ تعریف می شود حساب کنید. مقدار این پارامتر را در $B = 0$ حساب کنید.

■ مسئله شش: یک شبکه یک بعدی در نظر بگیرید که در هر جایگاه آن یک متغیر سه حالت $s_i = -1, 0, 1$ وجود دارد. انرژی هر هیئت به صورت زیر است:

$$H(s_1, s_2, \dots, s_N) = -J \sum_{i=1}^N \delta_{s_i, s_{i+1}}. \quad (92)$$

شرایط مرزی نیز پرودیک است. متوسط انرژی این سیستم را در دمای دلخواه حساب کنید.

■ مسئله هفت: یک شبکه یک بعدی با شرایط مرزی تناوبی با $2N$ جایگاه در نظر بگیرید. (s) انرژی هر هیئت از اسپین ها به شکل زیر است:

$$H(s_1, s_2, \dots, s_{2N}) = -J \sum_{i=1}^{2N} s_i s_{i+1} - B \sum_{i=1}^{2N} s_i. \quad (93)$$

اما همه اسپین های مربوط به جایگاه های زوج روی مقدار $s = 1$ ثابت شده است، یعنی

$$s_2 = s_4 = \dots s_{2N} = 1$$

و فقط اسپین های مربوط به جایگاه های فرد افت و خیز حرارتی دارند. انرژی متوسط این سیستم را در دمای دلخواه حساب کنید.

■ **قدردانی:** از بهروز بنیادی دانشجوی این درس در سال ۱۴۰۳ که اشکالاتی از متن اولیه این درسنامه را به من یادآوری کردند تشکر می‌کنم. نسخه اولیه این درسنامه شامل ده اشتباه ویرایشی و هم چنین چندین اشتباه مهم در بعضی از ضرایب و روابط ریاضی بود. آرمین یداللهی دانشجوی این درس در سال ۱۴۰۳، با شکیبایی فراوان تمامی این اشکالات را به من یادآوری کردند. نسخه نهایی این درسنامه که امیدوارم کم اشتباه باشد، مرهون این کمک و لطف بی سابقه اوست.